

Популяционная игра.

Популяционная игра - статическая модель взаимодействия в большой однородной группе индивидуумов.

Это понятие подобно игре в нормальной форме в классической теории, и для него обобщаются основные некооперативные принципы оптимальности:

- RH
- *решение по доминированию,*
- а также вводится понятие *эволюционно устойчивой стратегии*

Формально **популяционная игра** G задается совокупностью параметров

$$G = \langle J, f_j(\pi, \omega), j \in J, \pi \in \Pi, \omega \in \Omega \rangle,$$

- где J - множество стратегий участников этой игры
- $\pi = (\pi_j)_{j \in J}$ - распределение игроков по стратегиям
- $\Pi = \{\pi \mid \pi_j \geq 0, \sum_{j \in J} \pi_j = 1\}$ - стандартный симплекс
- $f_j(\pi, \omega)$ - выигрыш игроков, использующих стратегию j , в зависимости от распределения по стратегиям π и других параметров модели ω (например, общей численности популяции и состояния внешней среды). Для социальных популяций в качестве выигрыша обычно рассматривают полезность потребления, доход или прибыль. В данном разделе эта функция задана экзогенно.

Пример популяционной игры (M. Smith).

Рассматриваются парные конкурентные столкновения за некоторый ресурс. Пусть индивидуумы популяции ищут желаемые объекты (пищу, место для жилья или самку). Некоторые из них получают объект без столкновения, а другие случайным образом сталкиваются в парах, причем одни из них оказываются в роли α хозяина объекта конкуренции, а другие – в роли β захватчика;

- J^α, J^β – множества вариантов поведения (альтернатив) в соответствующих ролях
- $\phi_{j^\alpha j^\beta}^\alpha$ и $\phi_{j^\alpha j^\beta}^\beta$ – выигрыши индивидуумов, если α выбирает вариант $j^\alpha \in J^\alpha$, а β – $j^\beta \in J^\beta$.
- $\lambda(N)$ – вероятность столкновения. Не зависит от стратегий и определяется численностью популяции N .
- ϕ^0 – выигрыш индивидуумов, избежавших столкновения.
- Стратегия индивидуума – пара $j = (j^\alpha, j^\beta)$, где $j^\alpha \in J^\alpha$, а $j^\beta \in J^\beta$ – правило выбора варианта поведения в зависимости от роли.
- Функция $f_j(\pi, N)$ указывает средний выигрыш индивидуумов, использующих стратегию j .

Обозначим через $p_\alpha(\pi)$ и $p_\beta(\pi)$ распределения по вариантам поведения индивидуумов в ролях α и β , соответствующие распределению по стратегиям π . Тогда

$$p_{j^\alpha}(\pi) = \sum_{j^\beta \in J^\beta} \pi_{j^\alpha j^\beta}, \quad p_{j^\beta}(\pi) = \sum_{j^\alpha \in J^\alpha} \pi_{j^\alpha j^\beta},$$

а для стратегии $i = (i^\alpha, i^\beta)$

$$f_{i^\alpha i^\beta}(\pi, N) = (1 - \lambda(N))\phi^0 + \frac{1}{2}\lambda(N)\left(\sum_{j^\beta \in J^\beta} \phi_{i^\alpha j^\beta}^\alpha p_{j^\beta}(\pi) + \sum_{j^\alpha \in J^\alpha} \phi_{j^\alpha i^\beta}^\beta p_{j^\alpha}(\pi)\right).$$

Рассмотрим также случай, когда **участники не различают состояния**. Тогда множество стратегий совпадает с множеством альтернатив: $J = J^\alpha = J^\beta$, $\pi = (\pi_j, j \in J)$, $\phi_{ij}^\alpha = \phi_{ij}$, $\phi_{ij}^\beta = \phi_{ji}$,

$$\bar{f}_i(\pi) = \sum_{j \in J} \pi_j \phi_{ij}, \quad f_i(\pi, N) = (1 - \lambda(N))\phi^0 + \lambda(N)\bar{f}_i(\pi).$$

В этом случае G эквивалентна игре $\bar{G} = \langle J, \bar{f}_i(\pi), i \in J, \pi \in \Pi \rangle$.

Ситуация, когда множество вариантов поведения и значения выигрыша индивидуума не зависят от его роли, возможна и в предыдущей модели. Однако модели поведения для этих внешне похожих ситуаций оказываются совершенно различными.

Основные статические принципы оптимальности.

Равновесием по Нэшу популяционной игры G называется такое распределение π^* , что всякая стратегия, используемая с положительной частотой, является оптимальным ответом на данное распределение при любом значении параметра ω , т.е.

$$\forall \omega \in \Omega \text{ и } \forall j \in J (\pi_j^* > 0) \Rightarrow j \in \text{Arg max}_{i \in J} f_i(\pi^*, \omega). \quad (2.1)$$

Пусть функции выигрыша в игре G разложимы, то есть имеют вид $f_j(\pi, \omega) = a(\pi, \omega) \bar{f}_j(\pi) + b(\pi, \omega)$, где $a(\pi, \omega) > 0$, как в модели случайных парных столкновений. Отметим, что та часть функции выигрыша, которая зависит от выбора игроком стратегии, не зависит от параметра модели ω . Тогда (2.1) эквивалентно следующему условию, которое уже не содержит параметра ω :

$$\forall j \in J : \pi_j^* > 0 \Rightarrow j \in \text{Arg max}_{i \in J} \bar{f}_i(\pi^*).$$

Понятие равновесия по Нэшу является самым известным критерием оптимальности, используемым в моделировании поведения. Однако, из анализа динамических моделей известно, что среди равновесий по Нэшу бывают и неустойчивые состояния, которые фактически не могут реализоваться. Поэтому приведем другие, **более сильные, критерии оптимальности.**

Эволюционно устойчивой стратегией (ЭУС) для популяционной игры G называется такое распределение π^* , что $\forall \omega \in \Omega \forall \pi \neq \pi^* \exists \bar{\lambda}(\pi) \in (0, 1) : \forall \lambda \in (0, \bar{\lambda}(\pi))$

$$f_{\pi^*}(\lambda\pi + (1-\lambda)\pi^*, \omega) > f_{\pi}(\lambda\pi + (1-\lambda)\pi^*, \omega).$$

Здесь $f_{\pi}(\pi', \omega) = \sum_{j \in I} \pi_j f_j(\pi', \omega)$ – средний выигрыш смешанной стратегии, или распределения π , если индивидуумы в популяции распределены по чистым стратегиям согласно π' .

Понятие ЭУС можно интерпретировать следующим образом. Пусть в некоторую популяцию, находящуюся в состоянии равновесия π^ , внедряется относительно небольшая группа "мутантов" с распределением по стратегиям π . Тогда, если распределение π^* является эволюционно устойчивым, то внедрившаяся группа не сможет закрепиться в популяции, так как ее средняя приспособленность меньше, чем приспособленность исходной стратегии π^* .*

Всякая ЭУС является равновесием Нэша. Действительно, если π не является равновесием, то мутанты с чистой стратегией лучшего ответа на π получают больший выигрыш, чем средний выигрыш в основной популяции. В силу непрерывности f относительно π это справедливо для любой достаточно малой группы таких мутантов. Данное утверждение справедливо, если доля отдельного индивида в популяции пренебрежимо мала в том смысле, что изменение его стратегии не влияет на значения функций выигрыша (Schaffer, 1988, 1989).

Уточним понятие ЭУС для взаимодействий в группах конечной численности, где изменение стратегии отдельного индивида влияет на значение функций выигрыша.

Для симметричной игры в нормальной форме с n игроками, множеством стратегий S и функцией выигрыша $f_j(s_j, s_{-j})$ ЭУС определяется как симметричная ситуация $s_j = S$ такая, что при любом изменении стратегии отдельным игроком его выигрыш в новой ситуации будет не больше, чем выигрыш любого из остальных игроков, сохранивших прежнюю стратегию. Т.е., "мутант" не получает преимущества перед "основной популяцией" в смысле значения выигрыша.

Так определенная ЭУС может не являться равновесием Нэша. В частности, для игры, соответствующей симметричной олигополии Курно, в равновесии Нэша игроки используют "рыночную власть" и снижают объемы выпуска по сравнению с конкурентным равновесием, в то время как ЭУС соответствует конкурентному равновесию.

Строгим равновесием популяционной игры G называется такое распределение π^* , что все игроки используют одну и ту же стратегию, которая является единственным лучшим ответом на это распределение:

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ и } \exists j \in J : \pi_j^* = 1 \text{ и } \forall i \neq j, \forall \omega \in \Omega \quad f_j(\pi^*, \omega) > f_i(\pi^*, \omega) + \varepsilon.$$

Отметим, что **всякое строгое равновесие является ЭУС**, в том числе для групп с достаточно большой конечной численностью.

Schaffer (1988) показал, что для случайных столкновений при наличии ролевой асимметрии участников (“хозяин-захватчик” в рассмотренном примере) не существует иных ЭУС, кроме строгих равновесий.

Для функций выигрыша $f_j(\pi, \omega)$ общего вида равновесий по Нэшу может не существовать. В других классах игр их оказывается много, причем большинство из них заведомо неустойчивы. В связи с этим представляет интерес другой принцип оптимальности – **доминирование**, также внутренне связанный с концепцией естественного отбора Дарвина.